問 1

波長 0.6 μの光子 1 個のエネルギーは、約 2eVである。$P=10^{-10}$Wのパワーは光子束になおすと、$\Phi=10^{-10}(\mathrm{Js}^{-1})/[2\mathrm{x}1.6\mathrm{x}10^{-19}(\mathrm{J})]=3\mathrm{x}10^{8}(\mathrm{s}^{-1})$である。フォトカソードから放出される電子束はこれにηをかけて、毎秒 3×10^{7}個程度。

問 2

フォトカソードから放出された電流の平均値が$\langle i\rangle$であったとすると、検出バンド幅Δν内のショットノイズパワーは $\langle {i_N}^2\rangle = 2e\langle i\rangle\Delta\nu$ となる。電流値の揺らぎの程度としては$\sqrt{\langle i_N^2\rangle}$をとればよい。この値がダイノードによって増幅され G 倍になるから、最終段におけるフォトカソード・ショットノイズ起源のパワーは、$\langle {I_N}^2\rangle = G^2 2e\langle i\rangle\Delta\nu$ となる。$\langle i\rangle = \langle i_c\rangle + i_d$ を代入すれば与えられた式になる。

問３

分数の分子：光パワーP を１光子のエネルギーhνで割って光子束をだし、それをη倍して電子束になおし、電荷 e 倍して電流にし、さらに G 倍して最終段での電流値をもとめ、これをパワーにするために２乗したもの。分母：第一項は問 2 の答えそのもの。分母の第２項はジョンソンノイズを与えている。

問 4

光がないとき、すなわち暗電流だけによるノイズを見積もると、$2G^2 e\, i_d \Delta\nu=3\mathrm{x}10^{-22}$ (A²)　であり、ジョンソンノイズは 4kT/R Δν =1.7×10^{-23} (A²)だから、ジョンソンノイズは無視することができる。そこで、この条件を入れた上で、S/N＝１とおく。すなわち

$$S/N = \frac{\left([P/(h\nu)]\eta\right)^2 e}{2\left(\langle i_c\rangle + i_d\right)\Delta\nu} = 1$$

である。分子の$[P/(h\nu)]\eta$ eは$\langle i_c\rangle$である。測定可能な最小の$\langle i_c\rangle$を求めるときには、分母において

$\langle i_c\rangle << i_d$ とおくことができるだろうから、$P = \dfrac{h\nu}{\eta}\sqrt{\dfrac{2i_d\Delta\nu}{e}}$ を得る。実際に値を代入すれば、最小検出可能な光パワーは $4\mathrm{x}10^{-16}$W程度となる。(<ic>が十分小さいことを逆に確認せよ。)

実際の検出では、入射光を強度変調し変調周波数で信号検出をする。そのときのバンドパスフィルターのバンド幅がΔνである。

問 5

光カソードに入射する電場は$e(t) = \mathrm{Re}[E_L e^{i(\omega_S+\omega)t} + E_S e^{i\omega_S}]$であり、その二乗に比例したカソード電流が流れる：$i_c \propto E_L^2 + E_S^2 + 2E_L E_S \cos\omega t$ と書ける。第一項は局部発振パワーであり時間的に一定、第２項は非常に小さいので無視、第３項がビート周波数ωの信号になり、ωのフィルターを通し

てこの項のみを検出するのがよい。

i_cをパワーP_LとP_Sを使って書く努力をする：

$$i_c \propto E_L^2\left\{1+\frac{2E_S}{E_L}\cos\omega t\right\} \Rightarrow i_c = \frac{P_L e\eta}{h\nu}\left(1+2\sqrt{\frac{P_S}{P_L}}\cos\omega t\right)$$

フォトカソードのノイズパワーは、入射局部発振光によるショットノイズと、暗電流とによる（信号光ははるかに微弱であるとしている。)：$\left\langle i_N^2\right\rangle = 2e\left(i_d+\frac{P_L e\eta}{h\nu}\right)\Delta\nu$ である。一方、信号パワーは（cos ^{2} ωtの時間平均が 1/2 となることを思い出し）$i_s^{\ 2} = \left(\frac{P_L e\eta}{h\nu}\right)^2 2\frac{P_S}{P_L}$ である。Gで増幅された後、出力段でのS/Nは：$\frac{2G^2 P_S P_L (e\eta/h\nu)^2}{\left[G^2 2e\{i_d + P_L e\eta/h\nu\} + 4kT/R\right]\Delta\nu}$ となる。ジョンソンノイズが無視できるとすると、与えられた式になる：$\frac{P_S P_L (e\eta/h\nu)^2}{\left[e\{i_d + P_L e\eta/h\nu\}\right]\Delta\nu}$

局部発振パワーが大きくなり暗電流を無視できれば、S/N＝$\frac{P_S P_L (e\eta/h\nu)^2}{eP_L e\eta/h\nu\,\Delta\nu} = \frac{P_S}{e}\frac{e\eta}{h\nu\Delta\nu} = \frac{P_S}{h\nu\Delta\nu/\eta}$ となる。つまり、S/Nは信号パワーだけで決まる。S/N=1 となる信号パワーは $P_{S,\min} = \frac{h\nu\Delta\nu}{\eta}$ である。もし量子効率が 100%ならば、Δν^{-1}の間に 1 個の光子が入射しても観測可能になる。これを量子限界の観測という。

10^{-18}W程度となる。