1. 「寿命τ 」で減衰する量（単位時間内に発生するパルスの数）を表すのは、よく知られているように、次の微分方程式の解：

$$\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{n}} = -\frac{\mathrm{dt}}{\tau} \ \rightarrow \ \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{n}}{\tau} \ \rightarrow \ \mathrm{n(t)} = \mathrm{n(0)e}^{-\mathrm{t}/\tau} \cdots (1)$$

最左の式「１個のモノが**パルスを【出す】**確率 dn/n が$-\frac{\mathrm{dt}}{\tau}$であるとは、この事象が他の何にも影響されないτ だけで記述される」ことを表す。

式(1) は連続的に変化する。だがもし、非常にまれにしか起きない現象（あるいは非常に短時間のゲートの中で観察する）なら離散的になるはず。

> 離散的な場合にも「１個のモノが**パルスを【出す】**確率は、他のモノの変化にも影響されず、自分の前歴にもよらず、したがって時刻にもよらない」という仮定から、$\mathrm{e}^{-\mathrm{t}/\tau}$なる寿命の式を導きたい。

(ア) 現象が前歴によらない：<u>時間原点のとりかたによらず</u>次の t の間に**パルスを【出さない】**確率は$P(t)$と書ける。
また、dtの間に**パルスを【出す】**確率は(dtに比例するだろうから)kdtとする。

(イ) 「時刻$t = 0$から$t = t$まで**【出さない】**、次の$t = t + dt$の間に**【出す】**」という事象に注目する。**パルスを【出さないでいる】**確率も**【出す】**確率も前歴や環境に依存しないので、この事象は「t の間**【出さない】**事象」と「dt の間に**【出す】**事象」の積事象となる。

$$P(t) \times \ kdt \cdots (2)$$

(ウ) 「$s + t$ の間**【出さない】**、そして次の瞬間 dt 内に**【出す】**確率」$P(s + t)kdt$

= 「s の間は**【出さない】**,

さらにその先tの間**【出さいない】**、

さらに次の瞬間に**【出す】**確率」 $P(s) \times P(t)\ kdt$

$$\rightarrow (s + t) = P(s) \times P(t) \cdots (3)$$

(エ) 関数方程式(3)の解は，未定の定数 A を含んで

$$P(t) = \ e^{At}$$

となる。

「永遠に**【出さない】**確率は 0 だから $\lim_{\mathrm{t}\rightarrow\infty} P(t) = 0 \Rightarrow$ A < 0。 **そこで**

$$P(t) = \ e^{-\lambda t}, \ \lambda > 0 \cdots (4)$$

とする。注意：$P(t)$は各時間区間$t \sim t + dt$に**【出さない】**事象の積に対する確率だから、P(t)を積分（＝和）しても規格化はできない

(オ) tまで**【出さない】**、そしてその後のdt 間に**【出す】**という積事象の確率(2)は$P(t) \times kdt = \ e^{-\lambda t} kdt$ となる。
別の時間帯に**【出す】**事象は互いに排他的であり、いつか<u>必ず</u>**【出す】**という式を書くと

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} kdt = k \times \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left[e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = \frac{k}{\lambda} = 1$$

したがって、「時刻$t = 0$から$t = t$まで**【出さない】**、そして次の$t = t + dt$の間に**【出す】**」確率密度は

$$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} \cdots (5)$$

これで、最初の目的は達成された

2. 指数関数的な減衰からポアッソン分布を導く

> 「時刻$t=0$から$t=t$までパルスを【出さず】、次の$t=t+dt$の間に【出す】」確率密度が$f(t)=\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}$で与えられるとき、そしてさらに母集団の数が一定に保たれる(パルスを発生してしまった分を供給する、またはその量がほとんど変化しないような短時間で観測する)とき、$\mathrm{t}=0\sim\mathrm{T}$の間に【出す】個数(したがってパルスの個数)が N となる確率を調べる。

(ア) $t=0\sim T$の間に【出す】個数が 0 となる確率:

$$p(0)=P(T)=e^{-\lambda t}$$

$P(T)$は$t=0\sim T$に**【出さない】**確率であり、その後に【出す】【出さない】を問わない。

(イ) $t=0\sim T$の間に**【出す】**個数が 1 の確率:

$$p(1)=\int_0^T\{P(t')\times\lambda dt'\times P(T-t')\}$$

積分記号の内側: $0\sim t'$まで**【出さいない】**、その後 dt' '内に**【出す】**、そのあと T まで**【出さない】**.

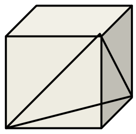
$$p(1)=\int_0^T e^{-\lambda t'}\times\lambda dt'\times e^{-\lambda(T-t')}=\int_0^T e^{-\lambda T}\lambda dt'=\lambda T e^{-\lambda T}$$

(ウ) $t=0\sim T$の間に【出す】個数が 2 の確率:

$$p(2)=\int_{\substack{t''=0\\ t'<t''}}^T\int_{t'=0}^T\left\{P(t')\times\lambda dt'\times P(t''-t')\times\lambda dt''\times P\left(T-t''\right)\right\}=\lambda^2e^{-\lambda T}\int_{\substack{t''=0\\ t'<t''}}^T\int_{t'=0}^T dt'dt''=\frac{(\lambda T)^2}{2}e^{-\lambda T}$$

(エ) $t=0\sim T$の間に【出す】個数が 3 の確率:

$$p(3)=\lambda^3e^{-\lambda T}\int_{\substack{t'''=0\\ t''<t'''}}^T\int_{\substack{t''=0\\ t'<t''}}^T\int_{t'=0}^T dt'dt''dt'''=\frac{(\lambda T)^3}{3!}e^{-\lambda T}$$



(オ) $t=0\sim T$の間に【出す】個数が N の確率:

$$p(N)=\lambda^Ne^{-\lambda T}\times[\,\textit{1辺が}\mathrm{T}\textit{ の}N\textit{次元立方体の隅の体積}]=\boxed{\frac{(\lambda T)^N}{N!}e^{-\lambda T}}$$

時刻 T より前に(すなわち T 内に)発生するパルス数が N となる確率を与える

λT をパラメータとするポアッソン分布

T 内に生じるパルス数の期待値がλT : 単位時間あたりのパルス数が平均でλ

3. ポアソン分布から指数関数的減衰を導く

(ア) 時間幅 T を小区間 Δ に分割する(分割数は T/Δ = M)。

① Δ 内にパルスが出ない確率 $=\frac{(\lambda\Delta)^0}{0!}e^{-\lambda\Delta}\simeq(1-\lambda\Delta)$

② Δ 内にパルスが1つ出る確率 $=\frac{(\lambda\Delta)^1}{1!}e^{-\lambda\Delta}\simeq\lambda\Delta(1-\lambda\Delta)$

(イ) 時刻 T で初めてパルスが1つ出る確率, Δ→dt の極限

$$(1-\lambda\Delta)^{M-1}\times\lambda\Delta(1-\lambda\Delta)=\lambda\Delta(1-\lambda\Delta)^M=\lambda\Delta\left(1-\frac{\lambda\mathrm{T}}{\mathrm{M}}\right)^M\to\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}}\lambda dt=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}}dt$$